

12-дәріс. Кейбір тригонометриялық функцияларды интегралдау. Жай бөлшектерді интегралдау. Рационал функцияларды интегралдау. Кейбір иррационал функцияларды интегралдау.

Квадрат үшмүшелігі бар функцияларды интегралдау.

Мына төмендегі интегралдарды табу әдісін қарастырайық

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx$$

және

$$\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx.$$

1) ax^2+bx+c квадрат үшмүшелігіндегі a коэффициентін жақша алдына шығарып, одан толық квадратты бөліп аламыз;

2) интегралға $x + \frac{b}{2a} = t$, $dx = dt$ алмастыруын енгіземіз;

3) Оны екі интегралдың қосындысы етіп жазамыз. Сонда екі интегралымыз да кестелік интегралға келеді.

1-мысал
$$\int \frac{x+3}{x^2-2x-8} dx = \int \frac{x+3}{x^2-2x+1-8-1} dx = \int \frac{x+3}{(x-1)^2-9} dx = \int \frac{t+1+3}{t^2-9} dt =$$

$$= \int \frac{tdt}{t^2-9} + 4 \int \frac{dt}{t^2-9} = \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2-9)}{t^2-9} - 4 \int \frac{dt}{3^2-t^2} = \left| t^2-9=u \right| = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} - 4 \frac{1}{2 \cdot 3} \ln \left| \frac{3+t}{3-t} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \ln |u| - \frac{2}{3} \ln \left| \frac{3+t}{3-t} \right| + C =$$

$$\left| \begin{array}{l} u = t^2 - 9 = (x-1)^2 - 9 = x^2 - 2x - 8 \\ t = x - 1 \end{array} \right| = \frac{1}{2} \ln |x^2 - 2x - 8| - \frac{2}{3} \ln \left| \frac{x+2}{4-x} \right| + C.$$

Рационал функцияларды интегралдау. Рационал бөлшекті интегралдау деп, $\int R(x) dx$

интегралын табуды айтады. Мұндағы $R(x)$ – дұрыс рационал бөлшек, яғни $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

$$= \frac{A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_nx^n}{B_0 + B_1x + B_2x^2 + \dots + B_mx^m}.$$

Егер $n < m$ болса, $R(x)$ – дұрыс бөлшек деп, ал $n \geq m$

болса бұрыс бөлшек деп аталады. Бұрыс бөлшекті интегралдау үшін алдымен алымын бөліміне бөлу арқылы оны көпмүшелік пен дұрыс бөлшектің қосындысына жіктейміз.

Мысалы
$$\frac{x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 1}{x^2 - x + 1} = x^2 - 3x - 2 + \frac{x+1}{x^2 - x + 1}.$$
 Одан әрі қарай тек дұрыс рационал

бөлшектерді интегралдауды қарастырамыз.

Теорема. Әрбір дұрыс рационал бөлшекті мына қарапайым бөлшектердің қосындысы түрінде жазуға болады

$$1. \frac{A}{x-a}; \quad 2. \frac{A}{(x-a)^k} \quad (k=2,3,4,\dots); \quad 3. \frac{Ax+B}{x^2+px+q}; \quad 4. \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}; \quad (k=2,3,4,\dots),$$

мұндағы A, B – нақты коэффициенттер, x^2+px+q үшмүшелігінің нақты түбірлері жоқ

(яғни $D = \frac{p^2}{4} - q < 0$).

Қарапайым бөлшектерді интегралдауды қарастырайық.

$$1. \int \frac{A dx}{x-a} = A \ln|x-a| + C.$$

$$2. k > 1 \text{ мәнiнде } \int \frac{A dx}{(x-a)^k} = A \int (x-a)^{-k} dx = A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C.$$

$$3. \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx \text{ интегралдау әдiсi жоғарыда қарастырылған}$$

$$4. \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} dx, \text{ мұндағы } k > 1 \text{ және бөлiмiндегi квадрат үшмүшелiктiң}$$

дискриминанты $D = p^2 - 4q < 0$. Квадрат үшмүшелiктен толық квадрат бөлiп алып

$x + \frac{p}{2} = t$, $dx = dt$, алмастыруын жасаймыз. Сонда $\int \frac{A_1 t + B_1}{(t^2 + m^2)^k} dt$ интегралын аламыз және

оны екі интегралдардың қосындысы түрiнде жазамыз. Бiрiншi интеграл t -ны дифференциал астына енгiзу арқылы интегралданады

$$\int \frac{t}{(t^2 + m^2)^k} dt = \frac{1}{2} \int (t^2 + m^2)^{-k} d(t^2 + m^2) = \frac{1}{2} \frac{(t^2 + m^2)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{(x^2 + px + q)^{-k+1}}{-k+1} + C.$$

Ал екiншi интегралды $I_k = \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^k}$ деп белгiлеп, төменгiдей есептеймiз:

$$I_k = \frac{1}{m^2} \left(\frac{2k-3}{2k-2} I_{k-1} + \frac{t}{2(k-1)(t^2 + m^2)^{k-1}} \right)$$

Бұл формуланы **рекурренттік формула** деп атайды. Рекурренттік формула арқылы I_2 -нi

$I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + m^2} = \frac{1}{m} \operatorname{arctg} \frac{t}{m} + C$ арқылы, ал I_3 -тi I_2 -арқылы таба отырып, ең соңында I_k -ны I_{k-1} арқылы табамыз.

2-мысал $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ табу керек $I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ осыдан $k=2, m=1$.

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C, \quad I_2 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(x^2+1)} + C. \text{ Сонымен } R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

$n < m$ болсын. Әбiр $Q(x)$ көпмүшелiгiн бiрiншi және екiншi дәрежелi көпмүшелiктердiң көбейтiндiсiне жiктеп жазуға болады

$$Q(x) = (x-a)^k \cdot (x-b)^l \cdot \dots \cdot (x^2+px+q)^t \cdot (x^2+ux+v)^s,$$

мұндағы $k, l, t, s, \dots$ — бүтiн сандар. Сонда дұрыс бөлшек элементар бөлшектерге төменгiдей жiктелiнедi:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{B_1}{(x-b)} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \dots + \frac{B_l}{(x-b)^l} + \dots \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q} + \\ & + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{M_t x + N_t}{(x^2 + px + q)^t} + \dots \end{aligned} \quad (13.1)$$

мұндағы $A_1, A_2, \dots, A_k, B_1, B_2, \dots, B_l, M_1, N_1, M_2, N_2, \dots, M_t, N_t, \dots$ — нақты сандар. Осы сандарды табу үшiн (13.1) теңдiгiнiң оң жағын ортақ бөлiмге келгiземiз. Содан соң теңдiктегi екi бөлшектiң бөлiмiн алып тастасақ, екi жағында да көпмүшелiк шығады. Осы теңдiктен бiрдей дәрежелi x -тiң алдындағы коэффициенттердi теңестiре отырып,

алгебралық теңдеулер жүйесін құрамыз. Алынған теңдеулер жүйесінен $A_1, A_2, \dots, A_k, B_1, B_2, \dots, B_l, M_1, N_1, M_2, N_2, \dots$ коэффициенттерінің мәндерін тауып, оларды (13.1) теңдігіне қоямыз. Осылай рационал бөлшектің жіктеуін табамыз. Осы әдісті **анықталмаған коэффициенттер әдісі** дейді.

3-мысал. $\int \frac{x^4 - 2x^3 + 3x + 4}{x^3 + 1} dx$ интегралын есептеу керек. Интеграл астындағы функция

бұрыс рационал бөлшек, сондықтан алымын бөліміне бөліп дұрыс бөлшекке

айналдырамыз: $\frac{x^4 - 2x^3 + 3x + 4}{x^3 + 1} = x - 2 + \frac{2x + 6}{x^3 + 1} = x - 2 + 2 \frac{x + 3}{x^3 + 1}$ Соңғы қосылғышты

карапайым бөлшектерге жіктейміз: $\frac{x + 3}{x^3 + 1} = \frac{x + 3}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 - x + 1}$

Бұдан $x + 3 = A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1)$ x^2 : $0 = A + B$; x : $1 = -A + B + C$; x^0 :

$$3 = A + C \Rightarrow A = \frac{2}{3}, B = -\frac{2}{3}, C = \frac{7}{3}.$$

Демек, $\frac{x + 3}{x^3 + 1} = \frac{2}{3(x + 1)} - \frac{2x - 7}{3(x^2 - x + 1)}$. Сонымен,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 - 2x^3 + 3x + 4}{x^3 + 1} dx &= \int \left[x - 2 + \frac{4}{3(x + 1)} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2x - 7}{x^2 - x + 1} \right] dx = \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{4}{3} \ln|x + 1| - \\ &- \frac{2}{3} \left[\int \frac{(2x - 1)dx}{x^2 - x + 1} - 6 \int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \right] = \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{4}{3} \ln|x + 1| - \frac{2}{3} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{8}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

Кейбір иррационал функцияларды интегралдау. Иррационал функцияларды интегралдауда айнымалыны алмастыру арқылы рационал функцияның интегралына келуге болатын кейбір жағдайларды қарастырамыз. $\int R(x, \sqrt[n]{x}) dx$ түріндегі интегралдар $t = \sqrt[n]{x}$ алмастыруы арқылы рационал функцияның интегралына келеді.

4-мысал $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3 + 1}} dx$ интегралын табайық. x -тің дәрежесіндегі бөлшектердің ортақ

бөлімі $k = 4$, олай болса берілген интегралды алу үшін $x = t^4$ ауыстыруын жасаймыз.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}} + 1} dx &= \left| \begin{array}{l} x = t^4 \\ dx = 4t^3 dt \end{array} \right| = \int \frac{t^2 \cdot 4t^3}{t^3 + 1} dt = 4 \int \frac{t^5}{t^3 + 1} dt = 4 \int \left(\frac{t^5 + t^2}{t^3 + 1} - \frac{t^2}{t^3 + 1} \right) dt = 4 \int t^2 dt - 4 \int \frac{t^2}{t^3 + 1} dt = \\ &= \frac{4t^3}{3} - \frac{4}{3} \int \frac{d(t^3 + 1)}{t^3 + 1} = \frac{4t^3}{3} - \frac{4}{3} \ln|t^3 + 1| + C = \left| t = \sqrt[4]{x} \right| = \frac{4\sqrt[4]{x^3}}{3} - \frac{4}{3} \ln|\sqrt[4]{x^3} + 1| + C. \end{aligned}$$

Қарастырылған интеграл $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax + b}{cx + d}}\right) dx$ түріндегі интегралдың дербес түрі болады

Мұнда $ad \neq cb$. Осы интегралды $t = \sqrt[n]{\frac{ax + b}{cx + d}}$ алмастыруы арқылы рационал функцияның интегралына келтіруге болады

Тригонометриялық функцияларды интегралдау.

Бұл пунктте біз $\int R(\sin x, \cos x) dx$ интегралын табуды қарастырамыз. Берілген интеграл

$tg \frac{x}{2} = t$ **алмастыруы** арқылы рационал функцияның интегралына келтіріледі.

Шынында да

$$\sin x = \frac{2tg \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - tg^2 \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad x = 2arctgt, \quad dx = \frac{2dt}{1 + t^2}$$

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1 + t^2}, \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right) \frac{2dt}{1 + t^2} = \int R_1(t) dt, \text{ мұндағы } R_1(t) - \text{рационал функция.}$$

$$\text{5- мысал } \int \frac{dx}{\sin x} = \left| tg \frac{x}{2} = t \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1 + t^2}}{\frac{2t}{1 + t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln \left| tg \frac{x}{2} \right| + C.$$

Бұл әдісті көрсетілген кез келген интегралға қолдануға болады, ал $\sin x$ немесе $\cos x$ айнымалыларының дәрежесі бірден жоғары болса қолайсыз үлкен өрнектер шығады. Ондай жағдайларда келесі әдістерді қолдану керек.

1. $\int \sin^m x \cos^n x dx$ түріндегі интеграл

а) m – бүтін оң тақ сан болса, интеграл $\int R(\cos x) \sin x dx$ түріне келтіріліп, $\cos x = t$ алмастырылуы жасалынады

б) n – бүтін оң тақ сан болса, интеграл $\int R(\sin x) \cos x dx$ түріне келтіріліп, $\sin x = t$ алмастырылуы жасалынады

$$\text{6- мысал } \int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x \cdot \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x) d \sin x = \\ = |\sin x = t| = \int (1 - t^2) dt = t - \frac{t^3}{3} + C = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

$$\text{в) } m, n - \text{бүтін теріс емес жұп сан болса, } \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

формулалары арқылы $\sin x$ пен $\cos x$ – тің реттері төмендетіледі.

2. Мына $\int \sin mx \cos nx dx$, $\int \cos mx \cos nx dx$, $\int \sin mx \sin nx dx$, мұндағы m, n – тұрақты сандар, түріндегі интегралды алу үшін тригонометрияның формулаларын:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)), \quad \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)),$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

қолдану және көбейтінділерді қосындыға жіктеу арқылы берілген интегралды алу қиынға түспейді.